962, 單葉函數ニ就キテ

春 本 　博 (神商船)

§1. 前号ニ於テ、次ノ定理ヲ證明シタ。

$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$ ガ $|z| < 1$ ニテ有理型單葉ニシテ、ソノ極ヲ α トスレバ

(1) $\quad |a_2| \leqq \dfrac{(1+|\alpha|)^2}{|\alpha|} + 2$

$$f(z) = \frac{(\sqrt{5}-2)z}{z+(\sqrt{5}-2)(1-z)^2}$$ ニヨッテ等号ガ成立スル。

モシモ，コノ場合 α ヲ固定シテオイテ、α ヲ極トシ，

$|z|<1$ デ有理型単葉ナ $f(z)$ ノ集合ヲ考ヘ、ソノ a_2 ノ評價トナルト $\dfrac{(1+|\alpha|)^2}{|\alpha|}+2$ ナル値ハ最良ナルモノデハナイ。

次ニ α ヲ用ヒテ a_2 ノ別ノ評價ヲ與ヘヨウ。

$g(z)=f(\alpha z)$ トオケバ、$g(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則単葉トナル。

$$g(z)=\alpha z+a_2\alpha^2 z^2+\cdots\cdots$$

故ニ Bieberbach ノ評價ニヨリ

$$(2)\qquad |a_2|\leqq\frac{2}{|\alpha|}$$

(1), (2) ノ評價式ヲ較ベルト、次ノコトガ容易ニ判ル。

$|\alpha|<\sqrt{5}-2$ ナルトキハ (1) ノ方ガマサリ

$|\alpha|=\sqrt{2}-2$ ナルトキハ (1), (2) ハ同ジ評價トナリ

$|\alpha|>\sqrt{5}-2$ ナルトキハ (2) ノ方ガマサル。

§2. $f(z)=\dfrac{z}{1+e^{-2i\theta}z^2}=z-e^{-2i\theta}z^3+\cdots\cdots$ (θ ハ實數)

ハ明カニ $|z|<1$ デ単葉正則デ、z^2 ノ係數 a_2 ハ 0 デ $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ ナル値ヲトラナイ。

逆ニ $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則単葉デ $a_2=0$ 且ツ $f(z)\neq\frac{1}{2}e^{i\theta}$ (θ ハ実數) ナラバ

$$f(z)=\frac{z}{1+e^{-2i\theta}z^2}$$

トナルコトヲ証明シヨウ。

簡単ノタメ $\frac{1}{2}e^{i\theta}=\alpha$ トオク。

$$g(z)=\frac{-\alpha f(z)}{f(z)-\alpha}$$

トオケバ $g(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則単葉デ

$$g(z)=z+\left(a_2+\frac{1}{\alpha}\right)z^2+\cdots\cdots$$

$a_2=0$ ナル故

$$g(z)=z+\frac{1}{\alpha}z^2+\cdots\cdots$$

z^2 ノ係数ガ $2e^{-i\theta}$ ナル故

$$g(z)=\frac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2}$$

オキモドセバ

$$f(z)=\frac{z}{1+e^{-2i\theta}z^2}$$

——（完）——